

引用格式: ZHANG Wenzhen, LU Benchu, CAI Dongmei, et al. Hybrid Phase Screen Simulation Method Based on Frequency-domain Complementarity with High Efficiency[J]. Acta Photonica Sinica, 2026, 55(8):0801001

张玮桢, 卢本出, 蔡冬梅, 等. 频域互补的混合相位屏高效模拟方法[J]. 光子学报, 2026, 55(8):0801001

频域互补的混合相位屏高效模拟方法

张玮桢¹, 卢本出¹, 蔡冬梅¹, 王宁¹, 荀宇畅¹, 李媛²

(1 太原理工大学 物理与光电工程学院, 太原 030024)

(2 山西传媒学院 信息工程学院 晋中 030600)

摘 要:针对功率谱法在有限口径下模拟大气湍流相位屏存在的低频缺失问题,提出一种基于频域互补的混合相位屏高效模拟方法。通过对 Zernike 模式频域响应特性及功率谱法采样频域特点的深入分析,确定了二者在频域上的互补关系。基于此,采用去掉 piston 项的前 6 项 Zernike 多项式(对应径向阶数 $n \leq 2$)重构低频分量,并与功率谱法生成的高频相位分量线性叠加,得到高、中、低频成分都充足的相位屏。数值实验结果表明,该方法生成的相位屏在视觉上兼具大尺度起伏与高频细节。对 5000 帧相位屏进行统计分析,其相位结构函数统计值与理论值吻合较好, Zernike 系数方差与理论结果保持一致。进一步在不同湍流参数下验证了该方法的低频补偿效果及统计一致性,通过多种评价指标与其他方法进行了对比分析。该方法在保证相位屏统计特性准确的同时,计算效率显著提升,相较于传统的谐波补偿法,避免了多次快速傅里叶变换,计算复杂度大幅降低。对 1024×1024 大小的相位屏,模拟速度提升了 20.82 倍,尤其适用于高分辨率、大样本的大气湍流相位屏快速模拟。

关键词:大气湍流;相位屏;功率谱法;低频补偿;Zernike 多项式

中图分类号:O439

文献标识码:A

doi:10.3788/gzxb20265508.0801001

0 引言

光在大气中传输时,大气湍流导致光波波前发生畸变,严重制约了天文成像观测、大气激光通信及自适应光学系统的性能^[1-3]。数值方法模拟大气湍流相位屏是研究大气湍流中光传输的一种有效手段。相位屏数值模拟方法主要包括基于频域采样的功率谱法^[4-5]、基于模态展开的 Zernike 多项式法^[6-8]和分形法^[9-10]。功率谱法通过在频域对湍流相位功率谱采样,再经由逆傅里叶变换生成相位屏,能够很好地复现湍流的高频细节。然而,功率谱法在实际应用中受到相位屏尺寸 D 的限制,其最低采样空间角频率 $\kappa_{\min} = 2\pi/D$,导致低于该频率的湍流分量缺失。尤其是,当 D 远小于大气湍流外尺度 L_0 时,湍流能量集中的大尺度低频成分将落在功率谱法采样区之外,导致模拟相位屏低频不足。

针对功率谱法生成的相位屏低频不足的问题,目前有多种补偿策略。LANE R G 等^[6]提出的谐波补偿方法可有效改善相位屏的大尺度统计特性。但随着低频补偿精度的提高,需要的谐波层数增大,计算开销随之增加。另一种思路是利用 Zernike 多项式对低频波前畸变的优异表征能力,将其与功率谱法生成的相位屏加权叠加^[11],叠加后的相位结构函数与理论曲线较为吻合。然而,该方法中用于平衡二者的加权系数根据相位结构函数实验值与理论值的拟合程度反复调整。这种基于实验结果确定的加权系数会随着所取 Zernike 阶数的调整而改变,是一种半经验方法。

Zernike 多项式法通过在圆域上正交的多项式基对波前进行模式展开,擅长描述大尺度相位畸变;而功

基金项目:国家自然科学基金重点国际(地区)合作研究项目(W2511046)

第一作者:张玮桢,19859804943@163.com

通讯作者:蔡冬梅,dm_cai@163.com

收稿日期:2026-04-10;录用日期:2026-07-14

<http://www.photon.ac.cn>

率谱法则是在频域对湍流功率谱进行均匀离散采样,采样频点集中在高频区,能够高效表征高频精细结构且具有快速算法优势。这两种方法在空间频域的分布具有互补性。为此,本文对 Zernike 模式的频域响应特性进行了深入分析,明确其与功率谱法在采样频域上的衔接关系,进而提出一种频域互补的混合模拟方法,用于解决功率谱法低频缺失的问题。该方法利用低阶 Zernike 模式重构低频分量,同时融合功率谱法在高频区的精细表征能力,实现快速、准确的相位屏模拟。

1 原理

功率谱法生成湍流相位屏的基本原理是:首先在二维频域网格 (κ_x, κ_y) 根据湍流模型计算相位功率谱 $\Phi_\phi(\kappa)$;随后生成复高斯随机场 $F(\kappa) = \sqrt{\Phi_\phi(\kappa)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} [N_1 + iN_2]$ (N_1, N_2 为独立的标准高斯随机变量),并使其满足 Hermitian 对称性以保证逆变换结果为实数,最后对 $F(\kappa)$ 进行逆傅里叶变换得到相位屏 $\phi(x, y)$ 。采用改进的 Von Kármán 相位功率谱 (Modified Von Kármán, MVK) ^[12]。

$$\Phi_\phi(\kappa) = 0.023r_0^{-5/3} \cdot \frac{\exp(-\kappa^2/\kappa_m^2)}{(\kappa^2 + \kappa_0^2)^{11/6}}, \quad \kappa_0 = \frac{2\pi}{L_0}, \quad \kappa_m = \frac{5.92}{l_0} \quad (1)$$

式中, $\kappa = |\kappa|$ 为空间角频率, r_0 为大气相干长度, L_0 和 l_0 分别为湍流外尺度和内尺度。

1.1 功率谱法的频域特性

功率谱法的性能取决于功率谱 $\Phi_\phi(\kappa)$ 在频域内的离散采样分辨率,其有效采样频率范围为 $[\kappa_{\min}, \kappa_{\max}]$ 。最小采样频率 $\kappa_{\min} = 2\pi/D$ 由口径 D 决定,最高采样频率 (奈奎斯特频率) $\kappa_{\max} = \pi N/D$ 由网格数 N 和口径 D 共同确定。因此,当口径 D 远小于湍流外尺度 L_0 时,功率谱法的最小采样频率远大于湍流特征频率 ($\kappa_{\min} \gg \kappa_0$)。图 1 为 MVK 谱的加权功率谱密度 $W(\kappa) = \kappa^2 \Phi_\phi(\kappa)$ 随空间角频率 κ 的归一化曲线。图中, MVK 谱的能量分布呈现显著的“低频集中”特性,其峰值位于特征频率 $\kappa_0 = 2\pi/L_0$ (红色虚线) 附近。这是由于外尺度限制了湍流能量的最大尺度,使得空间频率低于 κ_0 的湍流能量被截断,功率谱趋于平坦而非无限延长,在 κ_0 附近形成能量峰值。以模拟参数 ($D = 2\text{m}, L_0 = 30\text{m}, l_0 = 0.01\text{m}$) 为例, $\kappa_0 \approx 0.209\text{rad/m}$, 而功率谱法的最小采样频率 $\kappa_{\min} \approx 3.14\text{rad/m}$, 相差近 15 倍。因此,能量主峰所在的低频区落入未采样区域,导致功率谱法相位屏的低频分量不足,大尺度结构无法被有效表示。

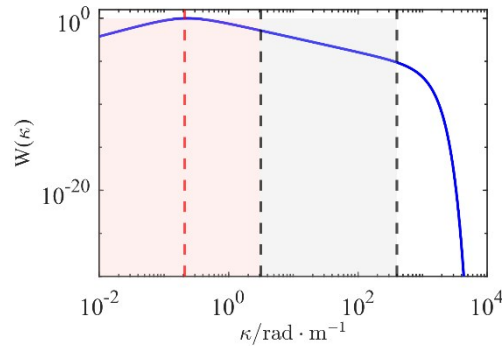


图 1 MVK 谱的归一化加权功率谱密度曲线

Fig.1 Normalized weighted power spectral density curve of the MVK spectrum

为定量分析功率谱法的能量缺失程度,定义湍流相位总方差 σ_{total}^2 为相位功率谱在全频域的积分,即

$$\sigma_{\text{total}}^2 = 2\pi \int_0^\infty \Phi_\phi(\kappa) \cdot \kappa \cdot d\kappa \quad (2)$$

功率谱法所能模拟的方差 (积分上限近似取 ∞) 为

$$\sigma_{\text{FFT}}^2 \simeq 2\pi \int_{\kappa_{\min}}^\infty \Phi_\phi(\kappa) \cdot \kappa \cdot d\kappa \quad (3)$$

二者比值 η 反映了功率谱法的湍流能量保留率。将 MVK 谱代入,忽略内尺度在低频区的影响 ($\exp(-$

$\kappa^2/\kappa_m^2) \approx 1)$, 可得

$$\eta = \frac{\sigma_{\text{FFT}}^2}{\sigma_{\text{total}}^2} = \frac{\int_{\kappa_{\min}}^{\infty} (\kappa^2 + \kappa_0^2)^{-11/6} \kappa d\kappa}{\int_0^{\infty} (\kappa^2 + \kappa_0^2)^{-11/6} \kappa d\kappa} = \left(\frac{\kappa_0^2}{\kappa_m^2 + \kappa_0^2} \right)^{5/6} \quad (4)$$

以参数 $D = 2\text{m}$, $L_0 = 30\text{m}$ 为例, $\eta \approx 0.013$ 。功率谱法生成的相位屏仅能复现大约 1.3% 的湍流相位方差, 98% 以上的湍流相位方差由于采样限制严重丢失。为了更直观地展示模拟口径 D 的影响, 计算不同 D 下的 η 值。当 $D = 40\text{m}$ 时, $\eta \approx 69.7\%$; 而 $D = 100\text{m}$ 时, $\eta \approx 93.0\%$ 。这表明随着 D 的增大, 低频相位方差的保留率显著提升。

根据上述分析, 功率谱法在有限频域上的离散采样本质上是一个频域截断系统。当 $D < L_0$ 时, 功率谱法无法生成空间尺度大于 D 的湍流结构, 导致了物理建模需求 (L_0 通常为数十米至数百米) 和数值实现之间的矛盾。从理论上来说, 增大模拟口径使其满足 $D > L_0$ 是解决低频缺失的最好办法。但这会显著增加采样点数和计算负担, 尤其对高分辨率相位屏模拟, 计算量往往难以承受。

谐波补偿技术可有效补偿低频分量, 但随着谐波层数的增加, 补偿效果的边际增益逐渐递减。同时, 谐波层次的增加会导致采样点急剧膨胀, 计算成本上升^[13]。相比之下, 基于 Zernike 多项式的补偿方法无需额外采样, 而是通过解析式直接表示大尺度相位起伏, 避免了谐波叠加的计算开销, 是一种更高效的选择。下面从 Zernike 模式的频域响应特性出发, 从理论上确定低频补偿所需的模式阶数, 进而在频域上和功率谱法衔接, 实现频域互补。

1.2 Zernike 模式法的频域特性

口径为 D 的观测系统, 其波前相位可用 Zernike 多项式展开为

$$\phi(\rho, \theta) = \sum_{j=1}^J a_j Z_j(\rho, \theta) \quad (5)$$

式中, (ρ, θ) 为归一化极坐标 ($\rho = 2r/D$), Z_j 为第 j 项 Zernike 多项式, a_j 为其对应系数。根据 NOLL 的理论, Zernike 系数协方差可由湍流相位功率谱密度 $\Phi_\phi(\kappa)$ 的积分给出^[8], 即

$$\begin{aligned} \langle a_{j'}, a_j \rangle &= \iint \tilde{Z}_{j'}(\kappa) \Phi_\phi(\kappa) \tilde{Z}_j^*(\kappa) d^2\kappa \\ \tilde{Z}_j(\kappa) &= \int Z_j(\rho) e^{-i\kappa\rho} d^2\rho = 2\pi i^n \frac{J_{n+1}(\kappa D/2)}{\kappa D/2} \end{aligned} \quad (6)$$

式中, n 为 Zernike 多项式径向阶数 (其与项数 j 的关系通常由 $j = (n+1)(n+2)/2$ 确定)。式 (6) 建立了 Zernike 系数与湍流功率谱 $\Phi_\phi(\kappa)$ 之间的关系, 表明 Zernike 模式相当于一个频域滤波器。 $\tilde{Z}_j(\kappa)$ 的解析解与第一类 Bessel 函数密切相关。忽略常数因子, n 阶 Zernike 模式对湍流能量的频域响应函数可表示为

$$|\tilde{Z}_n(\kappa)|^2 \propto \left[\frac{J_{n+1}(\kappa D/2)}{\kappa D/2} \right]^2 \quad (7)$$

图 2 展示了 Bessel 函数 $J_{n+1}(x)$ 的分布特性, 其主瓣峰值位置随着 n 的增加向高频移动, 同时在低频区域的幅值迅速衰减。根据式 (7), 这一特性直接决定了 Zernike 模式的功率谱响应函数 $|\tilde{Z}_n(\kappa)|^2$ 的形态, 如图 3 所示。随着径向阶数 n 的增加, $|\tilde{Z}_n(\kappa)|^2$ 的主瓣峰值位置向高频方向平移, 且峰值幅度显著衰减。这种“中心频率递增、峰值幅度递减”的特点, 表明 Zernike 多项式天然的尺度选择能力。低阶模式表征大尺度 (低频) 波前起伏, 而高阶模式表示小尺度 (高频) 细节。另外, 低阶模式的旁瓣极低, 其在高频段的响应可忽略不计, 因此采用低阶 Zernike 项补偿功率谱法缺失的低频分量时, 不会引入明显的高频混叠或能量冗余。

2 本文方法

基于功率谱法和 Zernike 模式法的频域特性, 提出一种基于频率互补的高效相位屏模拟方法。该方法将总相位屏 $\phi_{\text{total}}(x, y)$ 分解成 Zernike 低频项和功率谱法高频项, 即

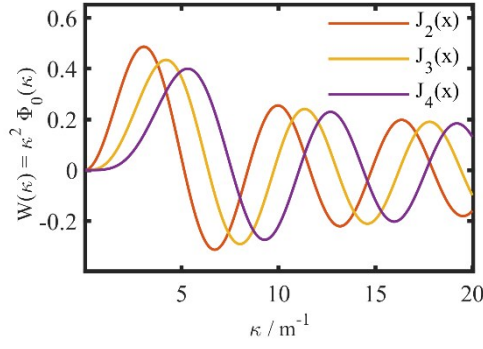


图2 Bessel函数随径向阶数 n 的分布
Fig.2 Bessel function versus radial order

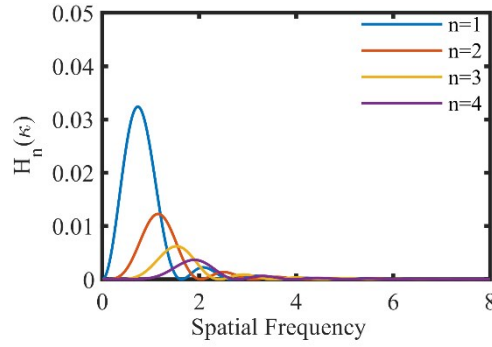


图3 Zernike模式功率谱响应函数随径向阶数 n 的分布
Fig.3 Zernike mode power spectrum response function versus radial order

$$\phi_{\text{total}}(x, y) = \sum_{j=1}^J a_j Z_j(\rho, \theta) + \phi_{\text{FFT}}(x, y), \quad \rho = \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}}{D}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (8)$$

式中, $\sum_{j=1}^J a_j Z_j(\rho, \theta)$ 利用前 J 项 Zernike 多项式对低频分量重构, $\phi_{\text{FFT}}(x, y)$ 利用功率谱法对高频分量模拟。

2.1 低频补偿的 Zernike 径向阶数确定原理

大气湍流波前的空间统计特性由其湍流谱决定, 真实湍流相位在时空上的变化除了整体倾斜($n=1$)外, 还包含显著畸变, 如离焦、像散等低阶像差($n=2$)^[14]。从湍流建模角度分析, 仅补偿 $n=1$ 模式可能会导致低频像差不足, 使相位结构函数在大尺度范围内偏离湍流统计规律。因此, 采用前6项 Zernike 模式(去除 piston)进行低频补偿, 以增强对大尺度波前结构的表征能力。

根据式(7), 设 $x = \kappa D/2$, 第 n 阶径向 Zernike 模式的频域响应函数 $|\tilde{Z}_n(\kappa)|^2$ 在峰值处对应的峰值频率 $\kappa_{\text{peak}}^{(n)}$ 满足 $\frac{d}{d\kappa} \left[\frac{J_{n+1}(\kappa D/2)}{\kappa D/2} \right] = 0$ 。通过数值求解可得: $n=1$ ($j=2, 3$), $\kappa_{\text{peak}}^{(1)} = 4.58/D$, $n=2$ ($j=4, 5, 6$), $\kappa_{\text{peak}}^{(2)} = 7.23/D$ 。而功率谱法对应的最小采样频率为 $\kappa_{\text{min}} = 2\pi/D \approx 6.28/D$ 。三者在频域上的关系为: $\kappa_{\text{min}}^{(1)} < \kappa_{\text{min}} < \kappa_{\text{peak}}^{(2)}$ 。

如图4所示, 前6项 Zernike 模式的频域响应主瓣呈阶梯分布, 其包络线覆盖了 κ_{min} 左侧的低频区域。当径向阶数过低(例如仅取倾斜项($j=2, 3$))时, 在 κ_{min} 附近会形成能量响应凹陷; 当径向阶数过高时, Zernike 模式可能会与功率谱法的高频分量发生频谱混叠。

2.2 Zernike 径向阶数确定的定量依据

基于有限孔径 D 下各频段的相位方差, 给出选择前6项补偿低频的定量依据。由式(2)得到, 湍流相位

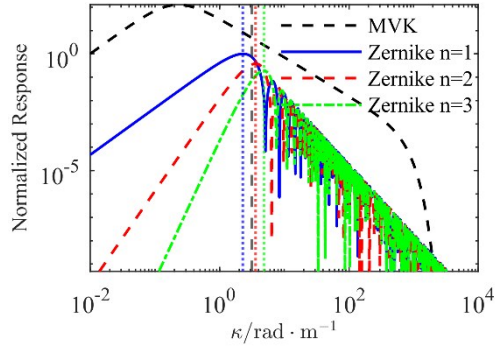


图4 低阶 Zernike 模式的频域响应

Fig.4 Frequency-domain response of low-order Zernike modes

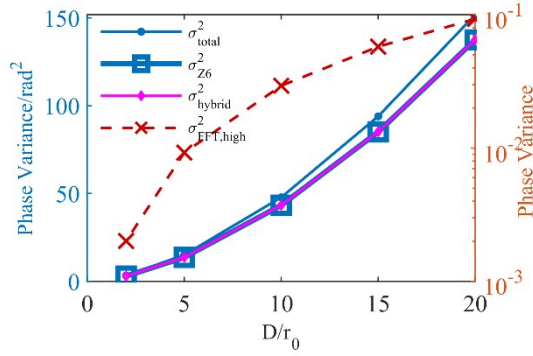


图5 湍流相位方差随湍流强度的变化曲线

Fig.5 Turbulent phase variance versus turbulence intensity

总方差为 $\sigma_{\text{total}}^2 \approx 1.03 \cdot (D/r_0)^{5/3}$ 。本文方法的相位方差 σ^2 为两部分之和,即

$$\sigma^2 = \sum_{j=2}^6 \langle a_j^2 \rangle_{\text{Kol}} f_j(D/L_0) + 2\pi \int_{\kappa_{\text{peak}}^2}^{\infty} \Phi_{\varphi}(\kappa) \kappa d\kappa \quad (9)$$

式中, $\langle a_j^2 \rangle_{\text{Kol}}$ 为 Zernike 系数协方差, f_j 为外尺度衰减因子; $\sigma_{\text{Z6}}^2 = \sum_{j=2}^6 \langle a_j^2 \rangle_{\text{Kol}} f_j(D/L_0)$ 表示前 6 项 Zernike 模式对应的相位方差; $2\pi \int_{\kappa_{\text{peak}}^2}^{\infty} \Phi_{\varphi}(\kappa) \kappa d\kappa$ 表示功率谱法对应的相位方差。

基于 MVK 功率谱模型,在 $D=2\text{m}$, $L_0=30\text{m}$ 参数条件下,根据式(9)计算不同湍流强度 (D/r_0) 的相位方差,结果如图 5 所示。随着 D/r_0 的增大,总方差随之增加。对比图中曲线可知,功率谱法所能模拟的相位方差约占总方差的 1%,绝大部分湍流能量发生缺失。而前 6 项 Zernike 模式的相位方差曲线与总方差曲线高度重合。定义本文方法的相位方差与理论总方差之比为 $\eta = \frac{\sigma^2}{\sigma_{\text{total}}^2}$,并在图 6 给出结果。由图 6 可知,前 6 项 Zernike 模式对应的 $\eta=90.8\%$ 。尽管 η 值随 D/r_0 的变化略有波动,但整体仍保持在较高水平,说明前 6 项 Zernike 模式能够有效弥补功率谱法丢失的低频能量。因此,综合频域关系与相位方差分析,本文选择前 6 项 Zernike 模式补偿功率谱法的低频分量,以在低频覆盖与计算效率之间实现平衡。

当然,本文方法并不局限前 6 项 Zernike 模式。对于高阶 Zernike 模式,其响应峰值频率范围与功率谱采样频域会发生重叠,因此在使用时需要避免 Zernike 低频与功率谱高频之间的能量重叠。此时,功率谱法生成相位屏时需将空间频率 $\kappa < \kappa_{\text{peak}}^{n_{\text{max}}}$ 处的频域分量置零, $\kappa_{\text{peak}}^{n_{\text{max}}}$ 为所取最大 Zernike 径向阶数对应的峰值频率。

3 仿真验证与讨论

基于大气湍流的 MVK 谱模型,并依据式(8)生成大气湍流相位屏。仿真参数: $D=2\text{m}$, $r_0=0.1\text{m}$, $L_0=$

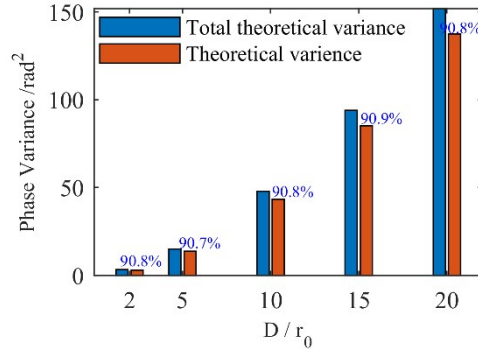


图6 本文方法的相位方差的理论值

Fig. 6 Theoretical phase variance of the proposed method

30m, $l_0 = 0.01\text{m}$, $N = 256 \times 256$ 。图7(a)是低频补偿后的单帧随机相位屏。相位屏在保留高频精细纹理的同时,能清晰呈现Zernike低阶模式表征的大尺度起伏特征;同时,波前畸变分布符合大气湍流统计特性。

3.1 相位结构函数与Zernike模态统计的计算与分析

对5000帧相位屏计算相位结构函数,并与理论值进行对比,结果如图7(b)所示。其中,MVK谱对应的相位结构函数理论值满足^[15]

$$D_\phi(r) \cong 7.754 r_0^{-\frac{5}{3}} l_0^{-\frac{1}{3}} r^2 \left\{ \left[1 + 2.033 \left(\frac{r}{l_0} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{6}} - 1.319 \left(\frac{l_0}{L_0} \right)^{\frac{1}{3}} \right\} \quad (10)$$

图7(b)中,相位结构函数统计值从低频到高频与理论值曲线吻合良好,最大相对误差值绝对值不超过0.08。图8(a)给出了仅取 $n=1$ (即 $j=3$)时相位结构函数统计值与理论值的对比结果。与图7(b)相比,在较大的空间距离处出现明显偏离。该结果与第2节的分析一致,进一步表明仅用倾斜项难以有效表征湍流的低频结构。图8(b)展示了当Zernike阶数扩展至 $n=7$ ($j=36$)时的结果;此时相位结构函数与理论值在全频段内均保持一致,从而验证了本文“重叠频域置零”策略的有效性。

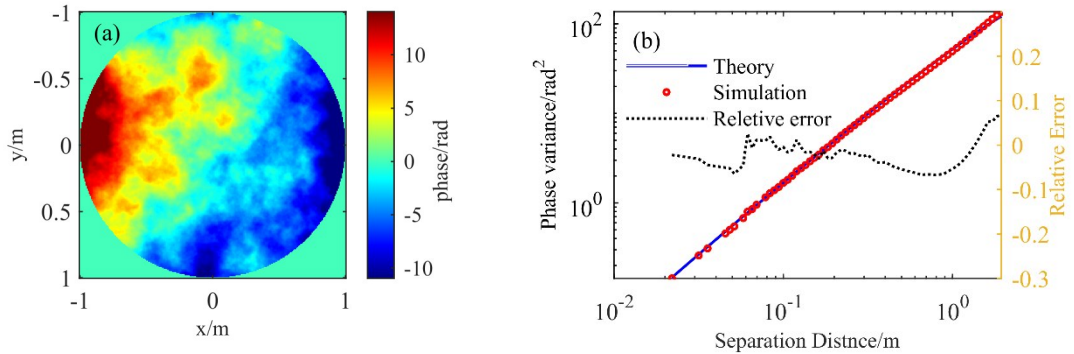


图7 大气湍流随机相位屏模拟结果。(a)随机一帧相位屏;(b)相位结构函数统计结果

Fig. 7 Simulation of phase screens. (a) A random frame of phase screen; (b) Statistical results of phase structure function

为进一步从模态能量分配角度验证相位屏的模拟性能,将相位屏投影到Zernike多项式基上,统计不同Zernike项的系数方差,并与系数方差理论值进行对比,如图9所示。Zernike系数方差随Zernike项数整体呈现衰减趋势,且与理论曲线保持一致。

综上所述,本文方法生成的相位屏不仅能够复现相位的空间相关统计,同时也能够正确反映其在Zernike模态空间中的能量分配特性。

3.2 参数敏感性与方法有效性验证

根据式(7),Zernike模式的响应函数主要和径向阶数 n 和模拟口径 D 有关,与湍流强度无关。湍流强度

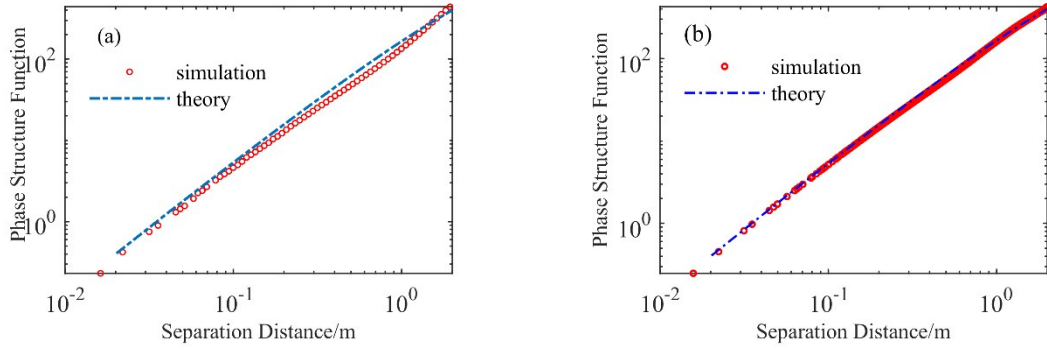

 图8 大气湍流随机相位屏相位结构函数。(a) $n=1 (J=3)$; (b) $n=7 (J=36)$

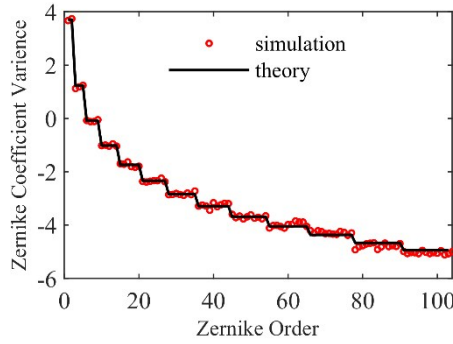
 Fig. 8 Phase structure function of phase screens. (a) $n=1 (J=3)$; (b) $n=7 (J=36)$


图9 Zernike系数方差的实验值和理论值

Fig. 9 Experimental and theoretical values of Zernike coefficient variance

增大将提高功率谱 $\Phi_\phi(\kappa)$ 的整体幅值,然而其 $\kappa^{-11/3}$ 的分布形态不发生改变。因此,Zernike 模式对低频能量的补偿性能不会随湍流强度变化。

定义相位结构函数的绝对相对误差均值(Mean Absolute Relative Error, MARE)作为评价指标,即

$$\text{MARE} = \frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} \left| \frac{D_{\text{sim}}(r_i) - D_{\text{theory}}(r_i)}{D_{\text{theory}}(r_i)} \right| \quad (11)$$

式中, $D_{\text{sim}}(r_i)$ 为相位结构函数统计值, $D_{\text{theory}}(r_i)$ 为理论值。MARE 值越小,表明相位屏的模拟性能越高。

图 10 给出了在不同湍流强度下,分别采用 MVK 谱和 Kolmogorov 谱生成的 5000 帧相位屏的 MARE 值。实验结果表明,在两种功率谱模型下, MARE 值均仅在 0.02 和 0.035 范围内发生无序的微小波动,且不随湍流强度的增强或减弱呈现单调变化关系。这种微小波动主要来源于有限样本采样带来的统计涨落,而非方法本身的系统性误差。当 D/r_0 变化时,尽管大气湍流能量的强度有所改变,但经前 6 项 Zernike 模式补偿后的相位屏仍能保持较高精度,模拟误差较小。本文方法对湍流强度表现出良好的鲁棒性。

保持其他模拟参数不变,计算不同外尺度 L_0 下相位屏的 MARE 值,结果如图 11 所示。如图所示,当外尺度 $L_0 \geq 20\text{m}$ 时, MARE 值稳定在约 0.035 附近,说明本文方法在较大的外尺度范围内具有良好且稳定的模拟精度。当外尺度 $L_0 \leq 20\text{m}$ 时, MARE 值随 L_0 的减小明显增大。其原因在于外尺度改变了 MVK 谱在低频段的拐点,使功率谱主要贡献区间向更高空间频率方向移动。在这种情况下,由于本文补偿采用前 6 项 Zernike 模式,固定阶数补偿与谱形匹配不足,从而使拟合精度略有下降。尽管如此,在本文考察的外尺度范围内, MARE 值仍在 0.06 以内,表明本文方法在不同大气湍流尺度下仍具有较强的工程适用性。

3.3 模拟相位屏统计量的收敛性验证

为验证所提方法生成的相位屏满足大气湍流的统计特性,并评估实现过程中可能的系统偏差。本节对 5000 帧相位屏进行处理:对其进行 50 次随机打乱实验,并计算不同帧数下全局相位均值的累计收敛曲线,

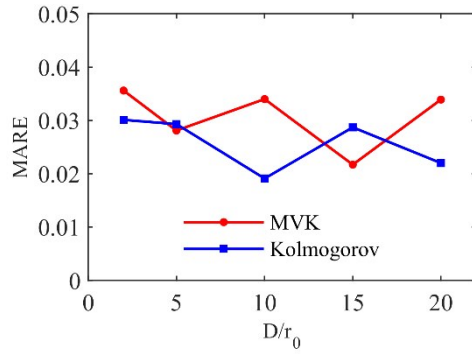


图10 相位屏的MARE值与湍流强度的关系

Fig. 10 MARE of simulated phase screens versus turbulence strength

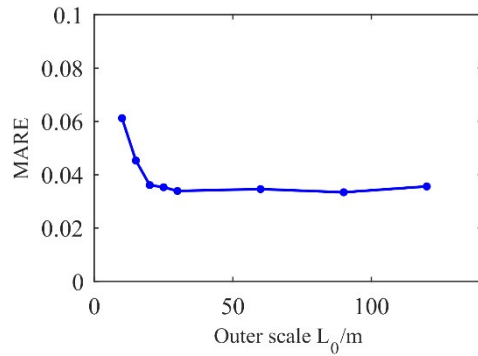


图11 相位结构函数的MARE值随外尺度的变化

Fig.11 MARE of the phase structure function with outer scale

结果如图12所示。图中,累积均值在较小帧数内快速逼近零,表明生成相位屏在全局范围内满足零均值假设。同时,随着样本数量增加,均值收敛曲线的95%置信区间逐步收敛,说明在大样本条件下该统计量具有较高稳定性和可靠性。

对上述5000帧相位屏,进一步统计其全局相位方差,得到方差收敛曲线及对应的相对误差分布,见图13。随着样本数量增加,累积方差迅速向理论值收敛,是理论方差的90%左右。该结果与文中2.2节给出的理论估计值90.8%吻合,说明统计收敛特性与理论分析符合。当帧数超过1000时,相对误差逐步稳定在10%左右。在所考察的样本规模下,模拟相位方差能够以较高精度逼近理论预测值。

3.4 与文献[11]的对比验证

在相同的相位屏生成与补偿条件下,与文献[11]方法进行了对比验证。文献[11]将湍流相位表示为

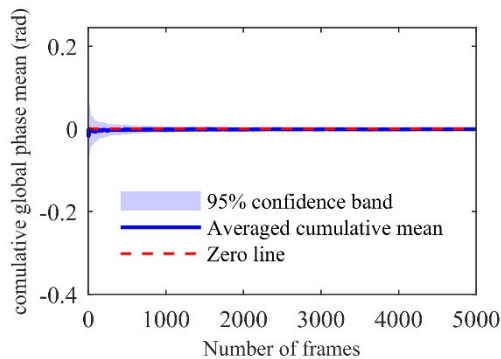


图12 多帧相位屏的相位均值收敛曲线

Fig.12 Convergence of the global phase mean for phase screens

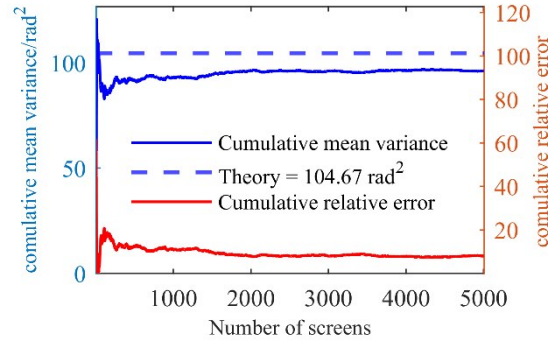


图13 相位屏的相位方差收敛曲线

Fig.13 Convergence curve of phase variance for phase screens

$\phi_{\text{total}}(x, y) = \lambda_1 \cdot \phi_{\text{FFT}}(x, y) + \lambda_2 \cdot \phi_{\text{Zernike}}(x, y)$, 其中系数 λ_1, λ_2 根据相位结构函数实验拟合程度进行调整。为保证对比的公平性, 采用与文献[11]一致的参数设置开展对比实验。选取 Kolmogorov 谱 ($D = 1\text{m}, r_0 = 0.2\text{m}$), 根据文献[11]确定的 ($\lambda_1 = 0.8, \lambda_2 = 1, j_{\text{max}} = 65$) 生成 5000 帧相位屏。同样在 Kolmogorov 谱 ($D = 1\text{m}, r_0 = 0.2\text{m}$), 采用本文方法也生成 5000 帧相位屏。

对两种方法的相位屏进行统计分析, 结果见图 14。本文方法的相位结构函数在低频到高频范围内与理论值总体吻合; 相较之下, 文献[11]在较大空间距离出现了对理论曲线的偏离。从绝对相对误差分布可以看出, 文献[11]的误差整体高于本文方法, 且在偏离部分更为突出。本文方法的绝对相对误差在 0 值上下波动, 总体起伏较小, 最大误差值小于 0.05。进一步计算二者的 MARE 值, 文献[11]为 0.11, 而本文方法为 0.016。

文献[11]通过引入系数 λ_1, λ_2 来对调整 Zernike 模式与功率谱法在频域上的重叠。该方法在引入低频分量后, 其精度依赖 λ_1, λ_2 的取值。若改变相关参数 (例如功率谱模型或 Zernike 项数), 则 λ_1, λ_2 需要重新标定。相比之下, 本文方法采用前 6 项 Zernike 模式, 计算量小; 同时没有需要额外调整的系数, 模拟精度相对稳定。即使采用可变化的 Zernike 项数, 也可通过数值解快速确定功率谱法频域置零范围, 有效避免了频谱重叠, 实现相位屏的高效生成。

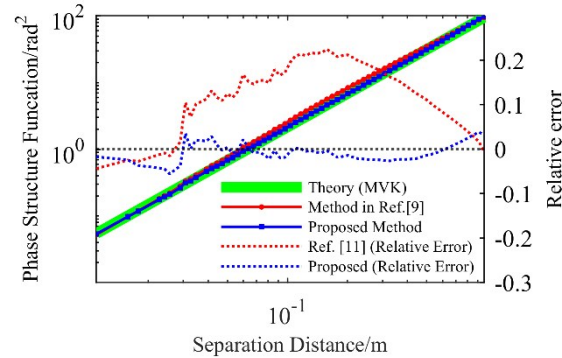


Fig.14 Comparison with the method in Ref. [11]

4 相位屏模拟时间

对于功率谱法的低频缺失问题, 传统的次谐波补偿算法通常需要执行 $S+1$ 次独立的快速傅里叶变换运算 (S 为谐波层数), 其总计算复杂度为 $O((S+1)N^2 \log_2 N)$ (设相位屏分辨率为 $N \times N$)。相比之下, 本文方法利用前 6 项 Zernike 多项式显式构建低频分量, 计算复杂度为 $O(N^2)$; 加上单次快速傅里叶变换生成高频分量, 总计算复杂度为 $O(N^2 \log_2 N + N^2)$ 。计算量的主导项仍为单次快速傅里叶变换的复杂度。当谐波层数 $S \geq 2$ 时, 本文方法能显著降低计算成本。另外, 从物理统计特性来看, 本文方法生成的相位屏的

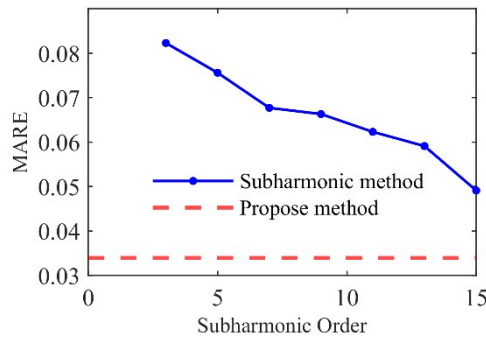


Fig.15 MARE value versus S for harmonic compensation

Zernike 系数方差严格依据湍流功率谱,低频统计特性符合物理统计规律;而谐波补偿通过叠加随机相位的次谐波分量来拟合低频,缺乏明确的物理约束。

为了验证本文方法在相位屏模拟中的计算效率。实验在配备 12th Gen Intel(R) Core(TM) i7-1260P 处理器(2.10 GHz)的计算机平台上进行。基于 MATLAB R2022b 环境,分别对本文方法和谐波补偿法进行了对比测试。计算不同谐波层数 S ,低频补偿的相位结构函数的 MARE。模拟参数($D=2\text{m}$, $r_0=0.1\text{m}$, $L_0=30\text{m}$, $l_0=0.01\text{m}$, $N=256\times 256$),见图 15。图中,随着层数 S 的增大,MARE 值减小,相位屏的模拟精度不断提高。当 $S=15$,谐波补偿法与相同参数下本文方法的 MARE 值最接近。因此本文对计算时间的评价采用 $S=15$ 的谐波补偿法。

表 1 给出了 $S=15$ 时,分别采用两种方法生成 1000 帧相位屏的总计算时间。随着相位屏分辨率从 128×128 增至 1024×1024 ,功率谱法的计算时间从 16.78 s 激增至 2205.11 s,增长了约 131 倍;而本文方法仅从 1.71 s 增至 105.91 s,增长约 62 倍。从计算时间比来看,本文方法比谐波补偿的功率谱法提升了 9.81 至 20.82 倍。综上所述,本文方法对高分辨率相位屏的模拟具有明显的时间优势。

表 1 1000 帧相位屏模拟时间
Table 1 Simulation time for 1000 phase screens

Method	s			
	128×128	256×256	512×512	1024×1024
Subharmonic compensation method	16.78	75.45	369.44	2205.11
Proposed method	1.71	6.87	28.68	105.91
Calculation time ratio	9.81	10.98	12.88	20.82

5 结论

本文通过分析功率谱法与 Zernike 模式法的频域特性,利用二者在频域上的互补特点,提出了一种兼具速度与准确性的混合相位屏模拟方法。在理论上明确了功率谱法的最低采样频率与 Zernike 模式频域响应函数主瓣峰值频率之间的关系。以此为基础,采用前 6 项 Zernike 多项式(径向阶数 $n\leq 2$)补偿功率谱法缺失的低频分量,得到包含完整频谱信息的大气湍流相位屏。

数值实验结果表明,本文方法生成的相位屏不仅具备丰富的高频细节和显著的大尺度低频起伏,其相位结构函数的统计平均值也与理论曲线高度吻合,有效修正了传统功率谱法在低频段的统计偏差。同时,相位屏的 Zernike 系数方差与理论值吻合良好,进一步验证了该方法在统计意义上的高保真度。

在计算效率方面,本文方法也展现出明显优势。相较于需进行多次快速傅里叶变换运算的谐波补偿法,仅需单次快速傅里叶变换加上少量 Zernike 多项式计算,总计算复杂度显著降低。尤其在生成高分辨率或海量相位屏时,其速度优势更为突出。该方法可为大规模的大气湍流数值模拟提供一种兼具物理准确性与计算高效性的实用方案。

需要特别说明的是,本文方法在实现形式上非常简洁,但其核心是基于频谱特性的物理互补,并非两种

方法的简单拼凑。这种“简捷”正是本文方法的优势所在,它以最少的计算代价,解决了功率谱法固有的低频缺失难题,避免了复杂迭代或冗余计算,体现了所提方法的高效性与物理机制的自洽性。

参考文献

- [1] HangNAN, WU Liang, CHEN Hang, et al. Turbulence-resistant beam transmission and communication characteristics in short-range free-space optical communication[J]. *Acta Optica Sinica*, 2025, 45(22): 2206005.
南航, 吴良, 陈航, 等. 近距离大气激光通信的抗湍流光束传输及通信特性研究[J]. *光学学报*, 2025, 45(22): 2206005.
- [2] AO Zhiwei, DAI Congming, WU Pengfei, et al. Atmospheric effects of star imaging (II): atmospheric turbulence[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2023, 52(5): 0552210.
陶志伟, 戴聪明, 武鹏飞, 等. 星光成像的大气影响研究(II):大气湍流[J]. *光子学报*, 2023, 52(5): 0552210.
- [3] ZHANG Xinyu, WANG Jin, XUE Jie, et al. Recognizing OAM signals under atmospheric turbulence using convolutional neural networks[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2025, 54(5): 0501001.
张鑫瑜, 王瑾, 薛洁, 等. 使用卷积神经网络识别大气湍流扰动的OAM光信号[J]. *光子学报*, 2025, 54(5): 0501001.
- [4] MCGLAERY B L. Computer simulation studies of compensation of turbulence degraded images[C]. *SPIE*, 1976, 74: 225-233.
- [5] LIU Tao, ZHU Cong, SUN Chunyang, et al. Improved subharmonic method for simulation of atmospheric turbulence phase screen[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2019, 48(2): 0201002.
刘涛, 朱聪, 孙春阳, 等. 一种改进的次谐波大气湍流相位屏模拟方法[J]. *光子学报*, 2019, 48(2): 0201002.
- [6] LANE R G, GLINDEMANN A, DAINITY J C. Simulation of a Kolmogorov phase screen[J]. *Waves in Random Media*, 1992, 2(3): 209-224.
- [7] RODDIER N. Atmospheric wavefront simulation using Zernike polynomials[J]. *Optical Engineering*, 1990, 29(10): 1174-1180.
- [8] NOLL R J. Zernike polynomials and atmospheric turbulence[J]. *Journal of the Optical Society of America B*, 1976, 66(3): 207-211.
- [9] WU Hanling, YAN Haixing, LI Xinyang, et al. Generation of rectangular turbulence phase screen based on fractal characteristics of distorted wavefront [J]. *Acta Optica Sinica*, 2009, 29(1): 114-119.
吴晗玲, 严海星, 李新阳, 等. 基于畸变相位波前分形特征产生矩形湍流相屏[J]. *光学学报*, 2009, 29(1): 114-119.
- [10] DING Xiaona, CAI Dongmei, ZHAO Yuan, et al. Performance of atmospheric turbulence phase screen simulation using fractal method[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2013, 40(12): s113002.
丁晓娜, 蔡冬梅, 赵圆, 等. 分形法模拟大气湍流相位屏性能分析[J]. *中国激光*, 2013, 40(12): s113002.
- [11] ZHANG Baodong, QIN Shiqiai, WANG Xingshu. Accurate and fast simulation of Kolmogorov phase screen by combining spectral method with Zernike polynomials method[J]. *Chinese Optics Letters*, 2010, 8(10): 969-971.
- [12] BENCHU LU, DONGMEI CAI. Simulation of a temporally dynamic atmospheric wavefront using the modified Von Kármán spectrum and Zernike-based method[J]. *Optics Express*, 2024, 32(22): 38609.
- [13] LU Wenyong, SHI Yan, CHEN Jianyong, et al. Extended resampling of subharmonic atmospheric turbulence simulation phase screen research[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2024, 53(8): 0801004.
卢文雍, 石岩, 陈建勇, 等. 扩展重采样次谐波大气湍流模拟相位屏研究[J]. *光子学报*, 2024, 53(8): 0801004.
- [14] YANG Yi, NIE Huan, WANG Xiaobo, et al. Influence of outer scale of ocean turbulence on propagation characteristics of gaussian beams[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2023, 52(4): 0401002.
杨伟, 聂欢, 王晓波, 等. 海洋湍流外尺度对高斯光束传输特性的影响[J]. *光子学报*, 2023, 52(4): 0401002.
- [15] ANDREWS L C. An analytical model for the refractive index power spectrum and its application to optical scintillations in the atmosphere[J]. *Journal of Modern Optics*, 1992, 39(9): 1849-1853.

Hybrid Phase Screen Simulation Method Based on Frequency-domain Complementarity with High Efficiency

ZHANG Wenzhen¹, LU Benchu¹, CAI Dongmei¹, WANG Ning¹, XUN Yuchang¹, LI Yuan²
(1 *School of Physics and Optoelectronic Engineering, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China*)
(2 *School of Information Engineering, Shanxi University of Technology, Jinzhong 030600, China*)

Abstract: The power spectrum method is widely used for its high efficiency in reconstructing high-frequency components of turbulence. However, the power spectrum method suffers from a significant

limitation: it fails to adequately sample low-frequency components due to the finite size of the simulation aperture. This inherent constraint leads to a severe truncation of the energy concentrated at large scales, resulting in a discrepancy between the simulated phase screens and the physical reality of atmospheric turbulence. Consequently, there exists a contradiction between the physical modeling requirements, which necessitate the inclusion of large-scale eddies, and the numerical implementation constraints. To address this long-standing challenge of low-frequency deficiency in the power spectrum method, this paper proposes a hybrid simulation method that leverages the frequency-domain complementarity between the Zernike polynomial method and the power spectrum method. The primary objective of this research is to develop an algorithm that can accurately reconstruct the low-frequency components missing in the power spectrum method while maintaining high computational efficiency, thereby resolving the conflict between physical fidelity and numerical feasibility. The proposed method is grounded in a rigorous theoretical analysis of the frequency-domain response characteristics of Zernike polynomials and the sampling mechanism of the power spectrum method. By deriving the analytical relationship between the Zernike mode response functions and the Modified Von Kármán (MVK) turbulence spectrum, we establish a quantitative criterion for seamless frequency-domain stitching. The core methodology decomposes the total phase screen into two distinct components: a low-frequency component and a high-frequency component. The low-frequency component, which corresponds to the energy peak of the MVK spectrum typically located below the minimum sampling frequency of the power spectrum method, is precisely reconstructed using a finite number of low-order Zernike polynomials. Through numerical analysis of the Zernike response function peaks, we determine that the first six Zernike polynomials (excluding the piston term) are sufficient to cover the low-frequency blind spot. This Zernike-reconstructed low-frequency phase is then linearly added to the high-frequency phase component generated by the standard power spectrum method. This hybrid approach ensures that the transition between the modal expansion (Zernike) and the spectral sampling (the power spectrum method) is smooth and physically consistent, effectively bridging the gap between the two methods. To validate the performance of the proposed method, extensive numerical experiments were conducted. Statistical analyses were performed on 5,000 phase screens. The results demonstrate that the generated phase screens exhibit rich high-frequency details as well as distinct large-scale low-frequency undulations, visually aligning with the expected physical behavior. Quantitatively, the calculated phase structure functions show excellent agreement with the theoretical MVK model across the entire frequency range, effectively correcting the statistical deviations observed in traditional PSRM at low frequencies. Furthermore, the variance of the Zernike coefficients derived from the simulated screens strictly adheres to the theoretical statistical laws predicted by Noll's theory. Comparative studies regarding computational efficiency reveal that the proposed method is significantly better than traditional subharmonic compensation techniques. By eliminating the need for multiple Fast Fourier Transforms (FFTs) required by subharmonic methods, the computational complexity is highly reduced. The tests also indicate that the proposed method is approximately 10 to 20 times faster than the power spectrum method with subharmonic compensation, particularly for high-resolution simulations. In conclusion, this study successfully resolves the low-frequency component deficiency inherent in the power spectrum method through a hybrid strategy based on frequency-domain complementarity. The proposed algorithm provides a robust solution that reconciles the physical requirements of atmospheric turbulence modeling with the practical constraints of numerical simulation. By utilizing the first six Zernike polynomials to compensate for the missing low frequencies, the method achieves high-fidelity simulation results without introducing redundant calculations or complex iterations. This approach not only ensures the statistical accuracy of the phase screens, as evidenced by the structure functions and coefficient variances, but also provides a practical and optimal solution for applications that demand massive datasets or real-time processing capabilities in optical engineering and atmospheric physics.

Key words: Atmospheric turbulence; Phase screen; Power spectrum method; Low-frequency compensation; Zernike polynomials

OCIS Codes: 010.1080; 010.1285; 010.1330; 010.7060; 050.0050

CSTR: 32255.14.gzxb20265508.0801001